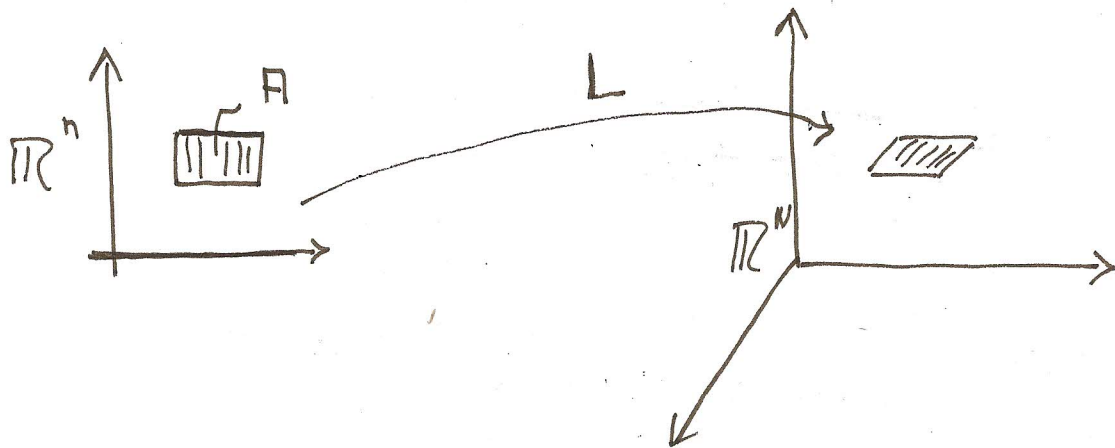


Transformation von Flächenintegralen /

Berechnung von Flächeninhalten

lineare Situation: $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N, n \leq N$ //

$$\|L\| := \sqrt{\det(L^t \cdot L)} \quad \text{„Jacobische von } L\text{“}$$



überlege geometrisch: für $A \subset \mathbb{R}^n$ (~~$\mathbb{R}^n$ messbar~~)

bekommt man das n -dim. Hausdorff Maß

von $L(A) \subset \mathbb{R}^N$ vermöge

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = \mathcal{L}^n(A) \cdot \|L\|$$

(vgl. voriges Lemma)

Satz 25.13 : "die Flächenformel"

Sei $n < N$, $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ C^1 und injektiv.

Dann gilt:

a) $A \subset U$ $\mathcal{L}^n$ -messbar $\implies$

$f(A)$ $\mathcal{H}^n$ -messbar mit

$$\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A \|Df\| d\mathcal{L}^n$$

b) $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{H}^n$ -messbar,

$A \subset U$ $\mathcal{L}^n$ -messbar $\implies$

$$\int_{f(A)} g d\mathcal{H}^n = \int_A g \circ f \|Df\| d\mathcal{L}^n,$$

wobei entweder beide Integrale existieren
und gleich sind oder keines der Integrale
existiert

Beispiele: 1) Kurvenlänge

-370- ~~17/18/19~~

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei C^1 und injektiv $\Rightarrow$

$$\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) = \int_{[a, b]} \|\gamma'\| \, d\mathcal{L}^1$$

$$\|\gamma'\| = \det(\gamma'^T \circ \gamma')^{1/2} = |\gamma'|$$

Euklidische Norm des Tangentialvektors

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt}$$

(rechtfertigt nochmals die Def. von $\mathcal{H}^1$)

2) Graphen in $\mathbb{R}^{n+1}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei $C^1 \Rightarrow$

$M := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$ ist n -dim Mfkt

in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\Gamma: \Omega \ni x \mapsto (x, f(x)) \in M$

als regulärer Parametrisierung

$$\Rightarrow \mathcal{H}^n(M) = \int_{\Omega} \llbracket DF \rrbracket \cdot d\mathcal{L}^n \quad -371- \text{ ~~11111~~ }$$

Es ist $DF(x) = \left(\begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 0 \quad \quad \quad 1 \\ \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{n} \end{array} \right) \Bigg\}^{n+1}$

$$\Rightarrow \det(DF^t \circ DF) = 1 + |\nabla f|^2$$

D.h. : $\mathcal{H}^n(\text{Graph } f) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} d\mathcal{L}^n$

Volumen und Flächenintegrale werden in Beziehung gesetzt durch den

Satz 25.14 (von Gauß, Divergenzsatz)

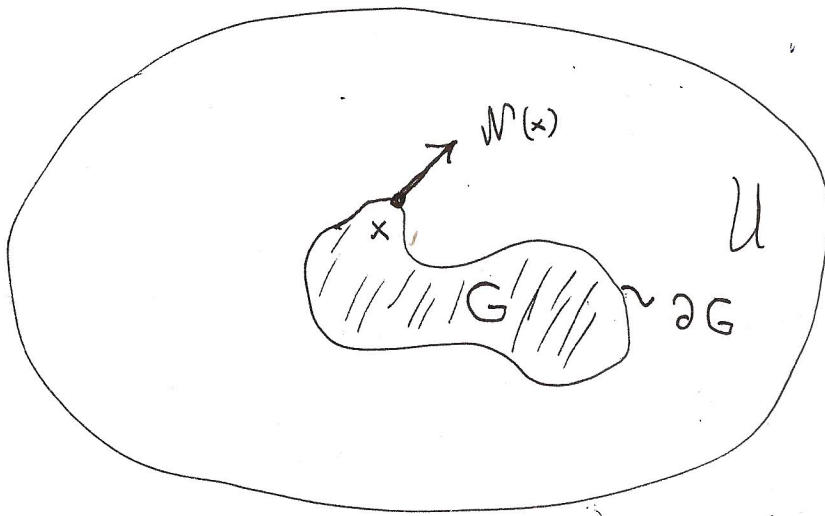
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend
und beschränkt. ∂G sei eine $(n-1)$ -
dim C^1 -Mannigfaltigkeit,

$N(x) \in (T_x \partial G)^\perp$ sei das äußere ~~Normalen~~
Normalenfeld, d.h. $|N(x)| = 1$, $N(x)$ -372-
 steht senkrecht auf ∂G und zeigt nach außen.

Ist $U \supset \overline{G}$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so

gilt

$$\int_G \operatorname{div} F \cdot d\mathcal{L}^n = \int_{\partial G} F(x) \cdot N(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$



$G =$ „Gauß - Gebiet“, wenn die
 Voraussetzungen von Satz 25.13 4
 gelten

1.) Kugeloberfläche: $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B) = \int_{\partial B} 1 \cdot d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial B} x \cdot x \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Gauß}}}{\int_B \operatorname{div} x \cdot d\mathcal{L}^n} = n \cdot \mathcal{L}^n(B).$$

z.B. $n = 3$:

$$\mathcal{L}^3(B) = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow \mathcal{H}^2(\partial B) = 4\pi$$

2.) Sei G wie im Satz von Gauß und

$f \in C^1(G)$ mit $\boxed{\operatorname{spt} f \subset G}^*$

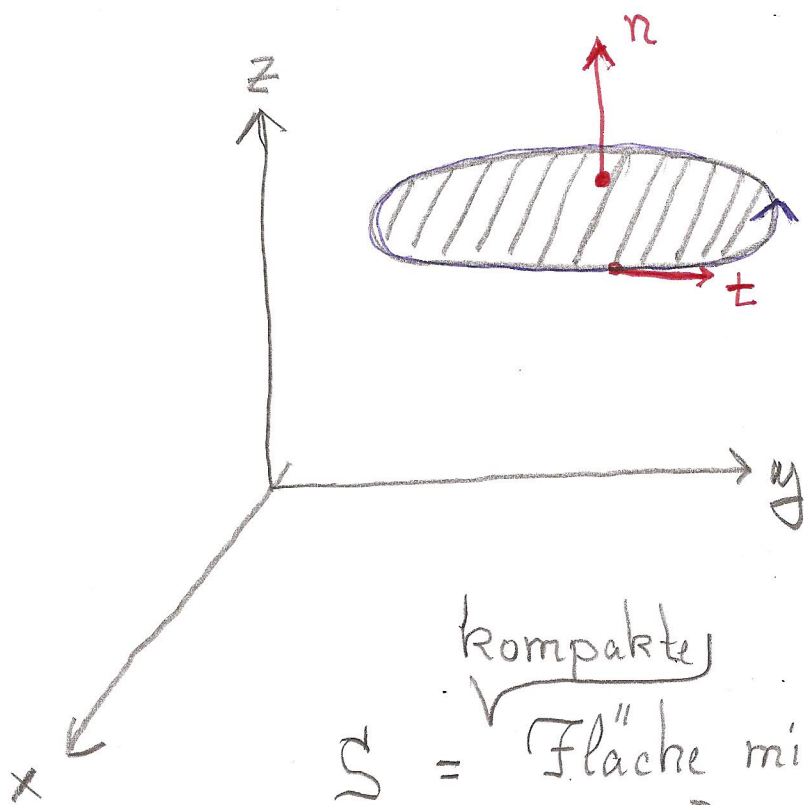
$\operatorname{spt} f :=$ Abschluss von $\{x \in G : f(x) \neq 0\}$
in $\mathbb{R}^n$

Offenbar: $\operatorname{spt} f$ kompakt $\xRightarrow[\text{(*)}]{\substack{\text{da } G \text{ beschränkt} \\ G \text{ offen}}}$

$f = 0$ in der Nähe von ∂G

Der Satz von Stokes

(klassisch in $\mathbb{R}^3$)



$S = \sqrt{\text{kompakte}}$ Fläche mit Randkurve γ
in $\mathbb{R}^3$

Forderung: auf S existiert ein Normalenfeld n
(S ist orientierbar $\leadsto$ Möbius Band)

man wählt für γ die Orientierung so,
dass $t \times n$ von S weg zeigt

(läuft man „aufrecht“ ($= n$) längs γ ,
so liegt S stets links)

Satz 25.15 Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $U \supset S^1$
und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ von der Klasse C^1 .

Dann ist

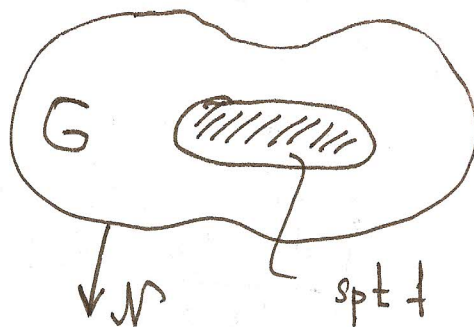
$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n \, d\mathcal{H}^2 =$$

$$\int_{\gamma} t \cdot F \, d\mathcal{H}^1.$$

Dann ist für

$$i = 1, \dots, n$$

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n = 0$$



denn: Sei $F(x) := (f(x), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \text{und}$$

$$\int_G \operatorname{div} F d\mathcal{L}^n = \int_{\partial G} F \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

analog für $i \geq 2$.

3.) Variationsprobleme / partielle Differentialgleichungen

Minimalflächen: Sei $\Omega =$ Gauß-Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und

$$J[u] := \mathcal{H}^n(\operatorname{Graph} u) \quad \text{für } u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

Flächenformel $\Rightarrow$

- 375 -

$$J[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, d\mathcal{L}^n,$$

wenn u glatt genug ist. zu festen Randdaten

Annahme: u minimiert, d.h.

$$J[u] \leq J[v] \quad \forall v \text{ mit } v = u \text{ auf } \partial\Omega$$

wähle dann $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $\varphi = 0$ in

der Nähe des Randes $\Rightarrow$

$$J[u] \leq J[u + t\varphi] \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} J[u + t\varphi] \Big|_{t=0} = 0 \quad \xrightarrow{\text{ausrechnen}}$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\mathcal{L}^n}_{= 0}$$

~~Integration:~~

$$= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\varphi \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) d\mathcal{L}^n -$$

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) d\mathcal{L}^n$$

-376-

Gauß + Wahl von $\varphi \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) d\mathcal{L}^n = 0 \quad \forall \varphi,$$

also:

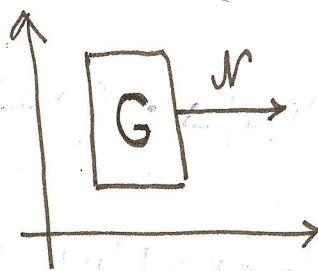
$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 \text{ auf } \Omega$$

Minimalflächengleichung

(vgl. letzte VL)

Beweisschritte für Gauß:

1. $G = \text{Quader}$



dann folgt die

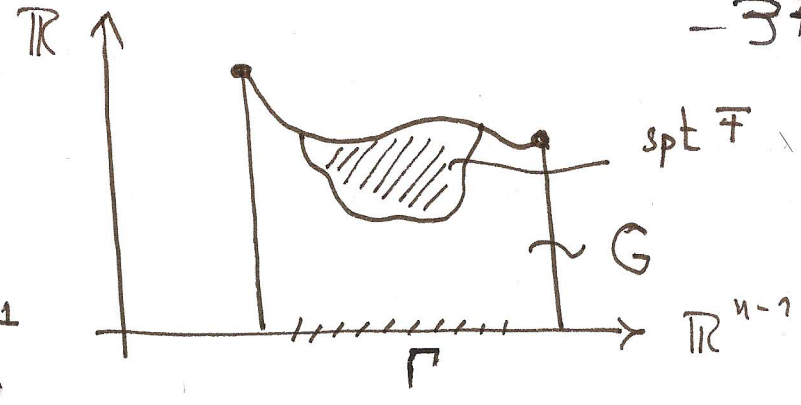
Aussage trivial mit Fubini + Hauptsatz

2. Graphensituation

$\partial G \cap \text{spt } \bar{F}$

liegt in einem

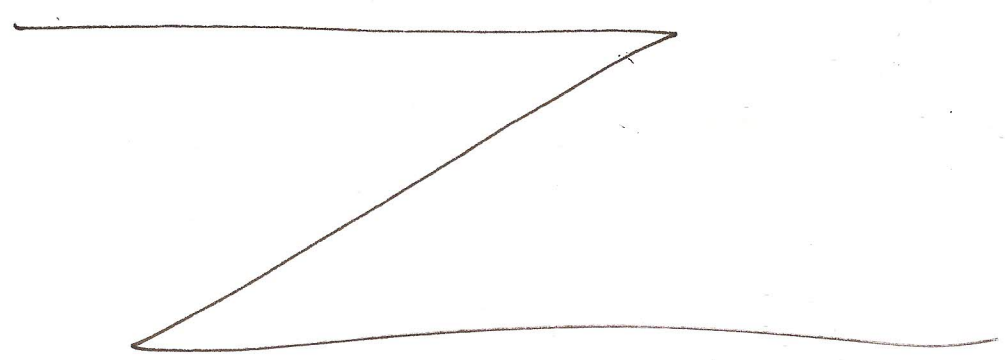
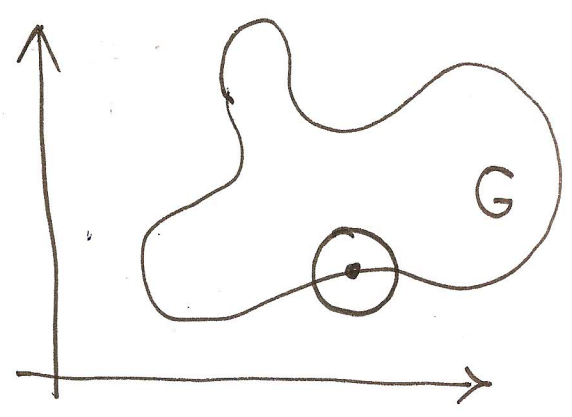
Graphen über $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$;



dann betrachte beide Integrale mit entsprechenden Transformationsformeln und benutze 1.

3. G allgemein;

lokal kann man die Situation 2. herstellen



Ergänzung: Kurvenintegrale von Vektorfeldern

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } F \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$$

Def: Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ stückweise C^1

Man setzt

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \in \mathbb{R}$$

(Kurvenintegral)

- Diese Bildung ist invariant gegen Umparametrisierungen von γ .

genauer:

- Ist γ regulär (injektiv mit $\gamma'(t) \neq 0$),

so folgt aus der Flächenformel

$$\int_{\gamma} F = \int_{\text{Bild}(\gamma)} F(p) \cdot T(p) d\mathcal{H}^{n-1}(p),$$

wobei $\left(p = \gamma(t) \right) \quad T(p) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$

Def: $F \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ heißt Konservativ -379-

: $\Leftrightarrow \exists f \in C^1(U)$ mit $\boxed{F = \nabla f}$
(f wird Potential zu F genannt)

offenbar:

$$\boxed{F \text{ konservativ} \Rightarrow \int_{\gamma} F = 0 \quad \forall \gamma \text{ geschlossen} \subset U}$$

denn $\int_{\gamma} F = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Beobachtung:

Ist F konservativ, also

$F = \nabla f$ auf U , und ist $f \in C^2$,

so ist wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ das

Feld F rotationsfrei, d.h.

$$\boxed{\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = \frac{\partial F^j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n}$$



(für $n=3$ äquivalent zu $\operatorname{rot} F = 0$)

-380-

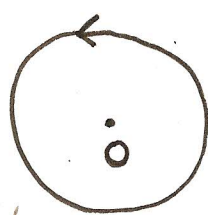
Leider :

F rotationsfrei $\not\Rightarrow F$ konservativ

Bspl : Sei $U := \mathbb{R}^2 - \{ (0,0) \}$ und

$$F(x,y) := \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

ist rotationsfrei auf U , aber



$$\oint_{\gamma} F = 2\pi \neq 0$$

für alle Kreise um 0 ($\Rightarrow F$ nicht konservativ!)

Man benötigt topologische Bedingungen an U ,
etwa wie im folgenden

Satz : Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $F \in$

$C^1(U, \mathbb{R}^n)$ sei rotationsfrei. Dann hat F

ein Potential, ist also konservativ.

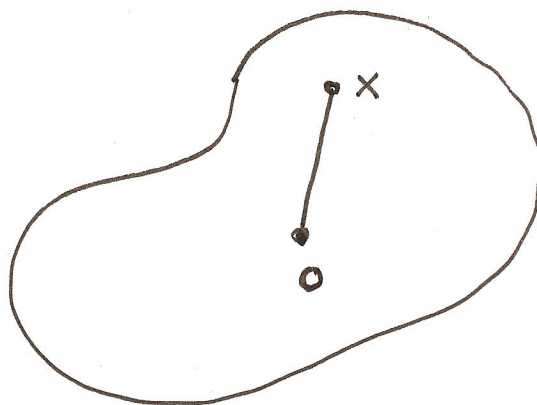
allgemeiner: U einfach zshgd.

Beweis: Sei U

o.E. sternförmig

bzgl. o , d.h. $t \cdot x \in U$

für alle $x \in U$, $0 \leq t \leq 1$.



Angenommen, es gilt $F = \nabla f$. Für $x \in U$

und $\gamma(t) = t \cdot x$, $0 \leq t \leq 1$, folgt:

$$f(x) - f(o) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt =$$

$$\int_0^1 F(tx) \cdot x dt$$

definiere umgekehrt

$$f(x) := \int_0^1 F(tx) \cdot x dt$$

und rechne nach:

$$\nabla f = F, \quad \text{falls } \frac{\partial F^i}{\partial x_j} =$$

$$\frac{\partial F^j}{\partial x_i}$$

□